Varianta 20

Subiectul I.

a) $|\vec{v}| = 13$.

b) $AC = \sqrt{82}$.

c) $\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Ecuația tangentei este: $3x - 4y - 25 = 0$.

e) $BC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

f) $a = 0$ şi $b = 1$.

Subiectul II.

1.

a) În $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$, avem $\hat{2}^{2007} = \hat{2}$.

b) $E = 0$

c) $x = 1$.

d) $x = 0$.

e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{35}{4}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.

d) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7n + 3}{8n - 2} = \frac{7}{8}$.

Subiectul III.

a) $tr(I_2) = 2$.

b) Relațiile se demonstrează prin calcul direct.

c) $UV - VU = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$.

d) $D=C-B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & b \\ c & y-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-y=a \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha-a \end{cases}, \ \alpha \in \mathbf{C}$.

e) Avem $\det(S)=\frac{b}{c}\neq 0$, aşadar matricea S este inversabilă, inversa sa fiind matricea

$S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix}$. Relaţia $S^{-1}BS=C$ se arată prin calcul direct.

f) Se demonstrează prin reducere la absurd, arătând că $\forall\, X, Y \in M_2(\mathbf{C})$, matricele I_2 şi $XY-YX$ nu au aceeaşi urmă.

g) Dacă pentru matricea $W \in M_2(\mathbf{C})$, există matricele $X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $W = XY - YX$, evident, $tr(W)=0$.

Reciproc, fie $W \in M_2(\mathbf{C})$ cu $tr(W)=0$, de forma $W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbf{C}$.

Deoarece $\underline{b\neq 0}$, $\underline{c\neq 0}$, din punctele **d)** şi **e)** rezultă că există matricele $B, C \in M_2(\mathbf{C})$ ca în enunţ, astfel ca $W=C-B=S^{-1}BS-B=S^{-1}(BS)-(BS)S^{-1}$.

Subiectul IV.

a) $I_0=\frac{\pi}{2}$ şi $I_1=1$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se foloseşte relaţia de recurenţă de la punctul **b)** şi primul principiu de inducţie.

d) Se foloseşte relaţia de recurenţă de la punctul **b)** şi primul principiu de inducţie.

e) Se arată uşor că şirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător şi că $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $I_n>0$.

Atunci, $0<I_{n+1}<I_n \Rightarrow \frac{I_n}{I_{n+1}}>1, \ \forall\, n\in\mathbf{N}^*$

şi folosind punctul **b)** se deduce imediat concluzia.

f) Din **c)** şi **d)** rezultă $I_{2n}=\frac{w_n}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}$ şi $I_{2n+1}=\frac{1}{w_n\cdot\sqrt{2n+1}}$, de unde

obţinem $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=w_n^2\cdot\frac{\pi}{2}, \ \forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

g) Trecând la limită în dubla inegalitate de la **e)** şi folosind criteriul cleştelui, obţinem

că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$, deci şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$.

Din **f)** rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.